

Skript – EXCEL 2010

„Lineare Optimierung“

Die lineare Optimierung (engl.: linear programming) ist ein Teilgebiet der Mathematik, insbesondere des Operations Research, das in den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts seine Entwicklung begann. Berühmte Namen wie Dantzig¹, Kantorowitsch² und Leontief³ sind damit verbunden. Im Wesentlichen werden lineare Funktionen optimiert unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen in Form linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen. Auf solche Probleme trifft man in verschiedenen betriebswirtschaftlichen Gebieten.

1. Einführende Beispiele

1.1. Ein Problem der Produktionsplanung

Zwei verschiedene Kunststoffprodukte I und II werden aus einem in beliebiger Menge verfügbaren Rohgranulat hergestellt. Die Produktion wird durch die drei Prozesse „Warmpressen“, „Spritzguss“ und „Verpackung“ bestimmt. Das Produkt I entsteht durch Warmpressen des Granulats und das Produkt II durch Spritzguss des verflüssigten Granulats. Beide Produkte werden anschließend für den Versand verpackt.

Die Abteilung „Warmpressen“ steht pro Tag für maximal 10 Stunden zur Verfügung und benötigt je Tonne von Produkt I eine Stunde. Die Abteilung „Spritzguss“ steht sechs Stunden am Tag zur Verfügung und benötigt ebenfalls eine Stunde für die Produktion von einer Tonne des Produktes II. In der Verpackungsabteilung stehen vier Arbeitskräfte jeweils höchstens acht Stunden zur Verfügung. Je Tonne von I werden 2 Stunden und je Tonne von II werden vier Stunden gebraucht. Die jeweiligen Stückdeckungsbeiträge betragen bei I 30,- €/t und bei II 20,- €/t.

In welcher Mengenkonstellation soll die Firma die beiden Produkte herstellen, damit der Gesamtdeckungsbeitrag pro Tag maximiert wird?

	Produkt I	Produkt II	max. Tageskapazität
Warmpressen	1 h/t		10 h
Spritzguss		1 h/t	6 h
Verpackung	2 h/t	4 h/t	32 h
Deckungsbeitrag	30,- €/t	20,- €/t	

¹ G.B. Dantzig: US-amerikanischer Mathematiker (1914-2005), entwickelte das Simplex-Verfahren.

² L.V. Kantorowitsch: russischer Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler (1912-1986), erhielt 1975 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

³ W.W. Leontief: russischer Wirtschaftswissenschaftler (1905-1999), erhielt 1973 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

z ... Gesamtdeckungsbeitrag

x_1 ... Produktionsmenge von Produkt I in t/Tag

x_2 ... Produktionsmenge von Produkt II in t/Tag

Mathematisches Modell: $z = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \text{Max!}$ (Zielfunktion)

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 10 \\ & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq & 32 \end{array} \right\} \text{ (Nebenbedingungen)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{(Nichtnegativitätsbedingungen)}$$

1.2. Ein Diät-Problem

Ein Mensch benötigt täglich ein Mindestmaß an unterschiedlichen Nährstoffen (Kohlenhydrate, Eiweiß, Fett). Es stehen ihm die zwei Nahrungsmittelsorten I und II zur Verfügung.

Wie muss der Mensch sein tägliches Menü zusammenstellen, damit er einerseits genügend Nährstoffe erhält und andererseits möglichst wenig dafür bezahlen möchte?

in ME/100g	Nahrungsmittel		täglicher Mindestbedarf (in ME)
	I	II	
Eiweiß	3	1	15
Fett	1	1	11
Kohlenhydrate	2	8	40
Preis (in €/100g)	2,-	4,-	

z ... Gesamtkosten

x_1 ... Nahrungsmittelmenge von I (in 100g/Tag)

x_2 ... Nahrungsmittelmenge von II (in 100g/Tag)

Mathematisches Modell: $z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Min!}$ (Zielfunktion)

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 & \geq & 15 \\ x_1 + x_2 & \geq & 11 \\ 2x_1 + 8x_2 & \geq & 40 \end{array} \right\} \text{ (Nebenbedingungen)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(Nichtnegativitätsbedingungen)

2. Allgemeines Modell

Wir wollen nun in allgemeiner Form das mathematische Modell einer **linearen Optimierungsaufgabe** (hier: **LOA**) formulieren. Dabei wollen wir anfangs möglichst viele Varianten einschließen.

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \begin{cases} \text{Max!} \\ \text{Min!} \end{cases} \quad (\text{Zielfunktion})$$

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} & b_m \end{array} \right\} \quad (\text{Nebenbedingungen})$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativitätsbedingungen})$$

In Vektor- bzw. Matrixschreibweise ergibt sich dann mit einer (m,n)-Matrix A und einer komponentenweisen Interpretation der Relationszeichen bei den Vektoren:

$$z = \vec{c}^T \vec{x} \rightarrow \begin{cases} \text{Max!} \\ \text{Min!} \end{cases}$$

$$A \vec{x} \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Insbesondere im Zusammenhang mit dem später zur rechnerischen Lösung einer LOA zu benutzenden Simplexalgorithmus gewinnt die **Normalform** einer **LOA** (hier: **NFLOA**), ein lineares Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen in Gleichungsform, an Bedeutung:

$$z = \vec{c}^T \vec{x} \rightarrow \text{Max!}$$

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad (\text{mit } \vec{b} \geq \vec{0})$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Durch geeignete Umformungen bzw. Transformationen kann man eine beliebige LOA in ihre Normalform überführen.

- Liegen die Nebenbedingungen in der Form $A \vec{x} \leq \vec{b}$ vor, so kann man durch Einführung eines Vektors $\vec{y}$ von nichtnegativen Schlupfvariablen (ökonomisch: freie, nicht genutzte Kapazitäten) die Gleichungsform erreichen: $A \vec{x} + E \vec{y} = \vec{b}$. Im Fall der Form $A \vec{x} \geq \vec{b}$ benutzt man $A \vec{x} - E \vec{y} = \vec{b}$.

- Liegt ein Minimierungsproblem vor, so ist $z = -\vec{c}^T \vec{x} \rightarrow \text{Max!}$ das äquivalente Maximierungsproblem.
- Im Fall von Variablenbeschränkungen führt eine lineare Transformation zur NFLOA:
 - (a) $x_j \geq s_j \quad (\neq 0) : \quad x_j = s_j + x'_j \quad \text{mit} \quad x'_j \geq 0,$
 - (b) $x_j \leq S_j : \quad x_j = S_j - x'_j \quad \text{mit} \quad x'_j \geq 0.$
- Fehlen die Nichtnegativitätsbedingungen gänzlich, so ersetzt man die Variable x_j durch zwei nichtnegative Variablen x'_j und x''_j mit $x_j = x'_j - x''_j$ (Nachteil: Verdopplung der Zahl der Variablen).

Betrachtet man eine NFLOA, dann heißt ein Punkt $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{x}^0 = \vec{b}$ und $\vec{x}^0 \geq \vec{0}$ **zulässige Lösung**. Die Menge aller zulässigen Lösungen wird als **zulässiger Bereich** B bezeichnet.

Eine zulässige Lösung $\vec{x}_{opt}$ nennt man **optimale Lösung** der LOA, wenn für alle zulässigen Lösungen $\vec{x} \in B$ die Bedingung $\vec{c}^T \vec{x} \leq \vec{c}^T \vec{x}_{opt}$ erfüllt wird.

Eine Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a}^T \vec{x} = \beta\}$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ heißt **Hyperebene** und die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a}^T \vec{x} \leq \beta\}$ nennt man einen **Halbraum**. Der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen im $\mathbb{R}^n$ wird **konvexes Polyeder** genannt. Handelt es sich um ein beschränktes konvexes Polyeder, so spricht man auch von einem **konvexen Polytop**. Eine Linearkombination $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ nennt man eine konvexe Linearkombination. Unter einem **Extremalpunkt** wollen wir einen Punkt $\vec{x}_{opt}$ eines konvexen Polytops verstehen, der sich nicht als konvexe Linearkombination zweier verschiedener Punkte des konvexen Polytops darstellen lässt. Konvexe Polyeder/Polytope besitzen nur eine endliche Anzahl an Extremalpunkten. Der zulässige Bereich B einer LOA ist ein konvexes Polyeder.

3. Grafische Lösung einer LOA

Für den Fall zweier Variabler ($n = 2$) besteht die Möglichkeit der grafischen Lösung der LOA. Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen beschreiben i.a. als lineare Ungleichungen Halbebenen in der reellen Ebene, deren Durchschnitt ein ebenes konvexes Polyeder ist.

Vorgehen für eine grafische Lösung:

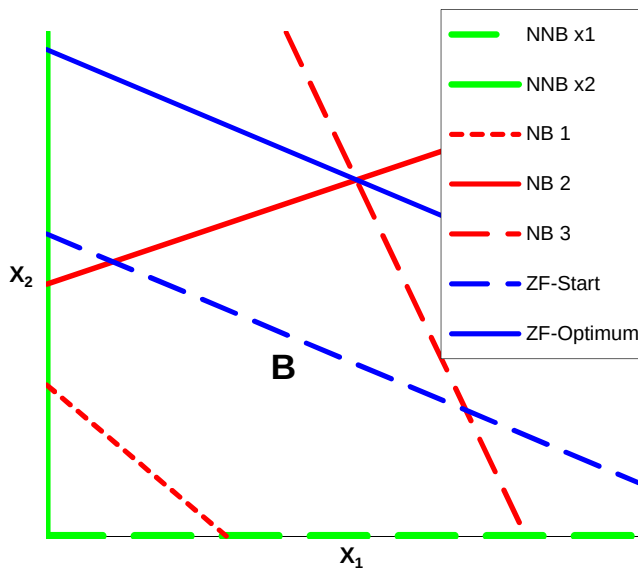
- (1) Aufstellen des mathematischen Modells: $z = \vec{c}^T \vec{x}, \quad A\vec{x} \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} \vec{b}, \quad \vec{x} \geq \vec{0}.$
- (2) Grafische Darstellung des zulässigen Bereichs B als Schnittmenge der Halbebenen, die den Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen genügen.
- (3) Grafische Darstellung einer beliebigen Zielfunktionsgeraden (z beliebig gewählt):

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2} x_1 + \frac{z}{c_2}.$$
- (4) Parallelverschiebung dieser Zielfunktionsgeraden in Richtung

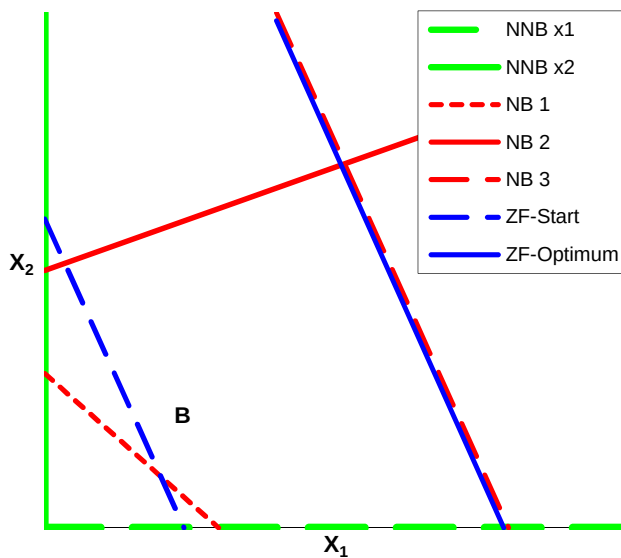
- wachsender z-Werte bei Maximierungsproblemen,
- fallender z-Werte bei Minimierungsproblemen.

bis das zulässige Maximum/Minimum in (mindestens) einem Eckpunkt von B erreicht ist:

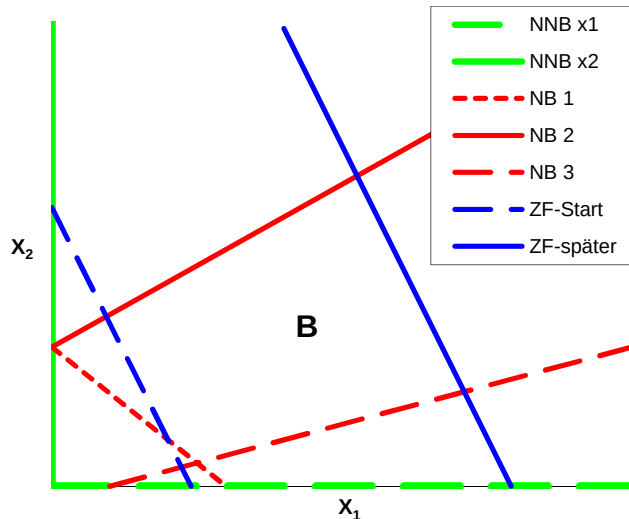
(a) Zielfunktionsgerade und B haben genau einen Eckpunkt $\rightarrow$ eindeutige optimale Lösung,



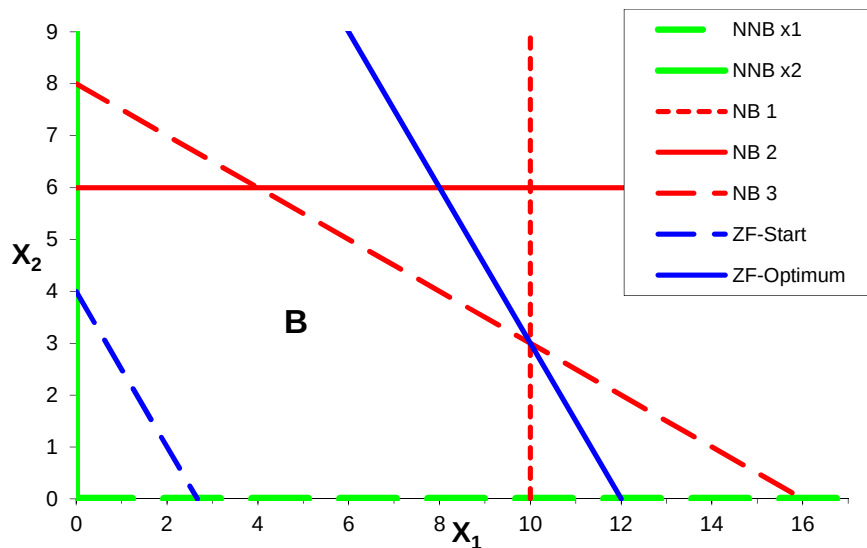
(b) Zielfunktionsgerade und eine Kante von B fallen zusammen $\rightarrow$ unendlich viele optimale Lösungen (Kante),



(c) B ist in Richtung der verschobenen Zielfunktionsgeraden unbeschränkt $\rightarrow$ keine Optimallösung.



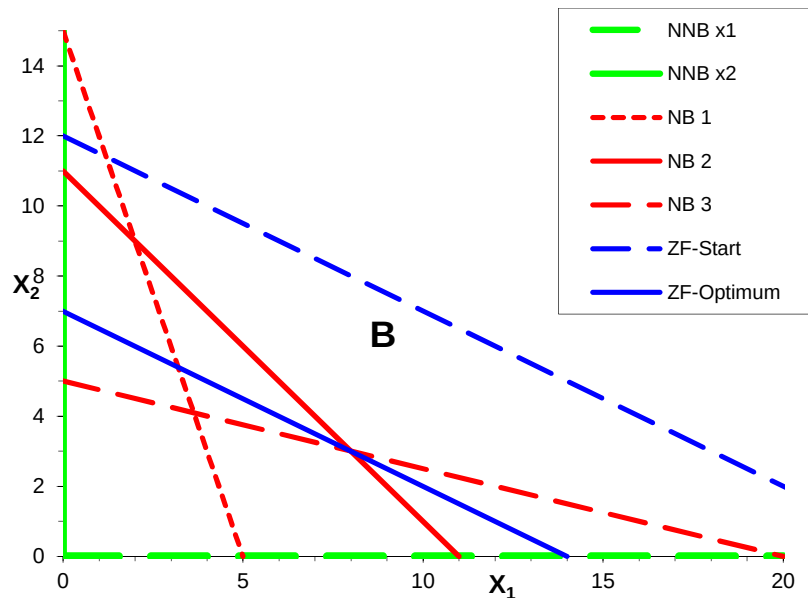
Es sollen nun die einführenden Beispiele 1.1. und 1.2. grafisch gelöst werden. Wir beginnen mit dem Produktionsplanungsproblem 1.1.



Bei den sich ergebenden Eckpunkten als Schnittpunkte zweier Restriktionen (NB bzw. NNB) unterscheidet man in zulässige Eckpunkte $(0|0)$, $(10|0)$, $(10|3)$, $(4|6)$, $(0|6)$, welche den zulässigen Bereich B definieren, und nichtzulässige Eckpunkte $(16|0)$, $(10|6)$, $(0|8)$.

Der optimale Gesamtdeckungsbeitrag von $z_{opt} = z_{max} = 360$ € pro Tag wird durch die optimale Lösung $\vec{x}_{opt} = (10|3)^T$ realisiert. Im Optimalpunkt $(10|3)$ werden die maximalen Kapazitäten beim Warmpressen und beim Verpacken exakt ausgenutzt sein ($\rightarrow$ „Engpassfertigungsstellen“), während die Fertigungsstelle Spritzguss nur zur Hälfte ausgelastet ist.

Es folgt das Diätproblem 1.2.



Bei den sich hier ergebenden Eckpunkten als Schnittpunkte zweier Restriktionen (NB bzw. NNB) unterscheidet man in zulässige Eckpunkte $(0|15)$, $(2|9)$, $(8|3)$, $(20|0)$, welche den zulässigen Bereich B definieren, und nichtzulässige Eckpunkte $(11|0)$, $(5|0)$, $(\frac{40}{11}|\frac{45}{11})$, $(0|0)$, $(0|5)$, $(0|11)$.

Die optimalen (minimalen) Nahrungsmittelkosten von $z_{opt} = z_{min} = 28,-$ € pro Tag werden durch die optimale Lösung $\vec{x}_{opt} = (8|3)^T$ realisiert. Im Optimalpunkt $(8|3)$, d.h. bei 800g der Sorte I und 300g der Sorte II, werden die Mindestmengen bei Fett und bei Kohlenhydraten exakt ausgenutzt, während 12 Mengeneinheiten mehr Eiweiß als erforderlich enthalten sind.

Bei beiden Aufgabenstellungen wurde deutlich, dass man sich bei der Lösungssuche auf die Eckpunkte des zulässigen Bereichs beschränken kann.

4. Anwendungsgebiete der Linearen Optimierung

4.1. Mischungsprobleme

Eine mögliche Anwendung der linearen Optimierung sind Mischungsprobleme, bei denen es darum geht, Rohstoffe oder Halbprodukte zu einem Endprodukt zusammenzustellen, wobei die Menge der jeweiligen Bestandteile innerhalb eines bestimmten Bereichs variieren können. Dabei sind in der Regel die Kosten zu minimieren bzw. der Gesamtgewinn zu maximieren. Geht es beim Mischen um die Zusammenstellung von Speise- oder Diätplänen, so findet man in der Literatur auch die Begriffe Hausfrauen- bzw. Diätproblem.

Bei unserem Mischungsproblem soll in einer Firma Tierfutter produziert werden, wofür die zwei Zusätze Z_1 und Z_2 verwendet werden. Jeder Sack Tierfutter muss mindestens 100g des Nährstoffes N_1 , mindestens 80g des Nährstoffes N_2 und mindestens 120g des Nährstoffes N_3 beinhalten.

	Anteil N_1 (in g/Sack)	Anteil N_2 (in g/Sack)	Anteil N_3 (in g/Sack)	Kosten (in €/Sack)
Z_1	20	20	60	8
Z_2	50	30	40	9

Wie viel Zusatzmittel sind jeweils pro Sack Futter zu verarbeiten, damit die Kosten für die Zusatzmittel pro Sack minimal werden?

Mathematisches Modell:

$$z = 8x_1 + 9x_2 \rightarrow \text{Min!} \quad (\text{Zielfunktion})$$

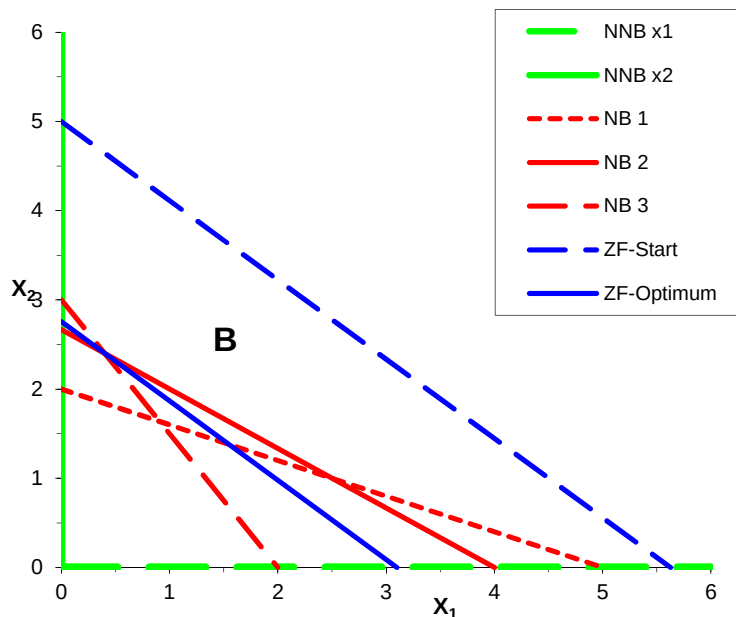
$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 8 \quad (\text{Nebenbedingungen})$$

$$6x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativitätsbedingungen})$$

Dieses Minimierungsproblem ist mit seinen zwei Variablen ($n = 2$) auch grafisch lösbar. Mit der optimalen Lösung $\bar{x}_{\text{opt}} = (0,4 \mid 2,4)^T$ ergeben sich 24,80 € als minimale Kosten pro Sack Futter.



4.2. Transportplanung

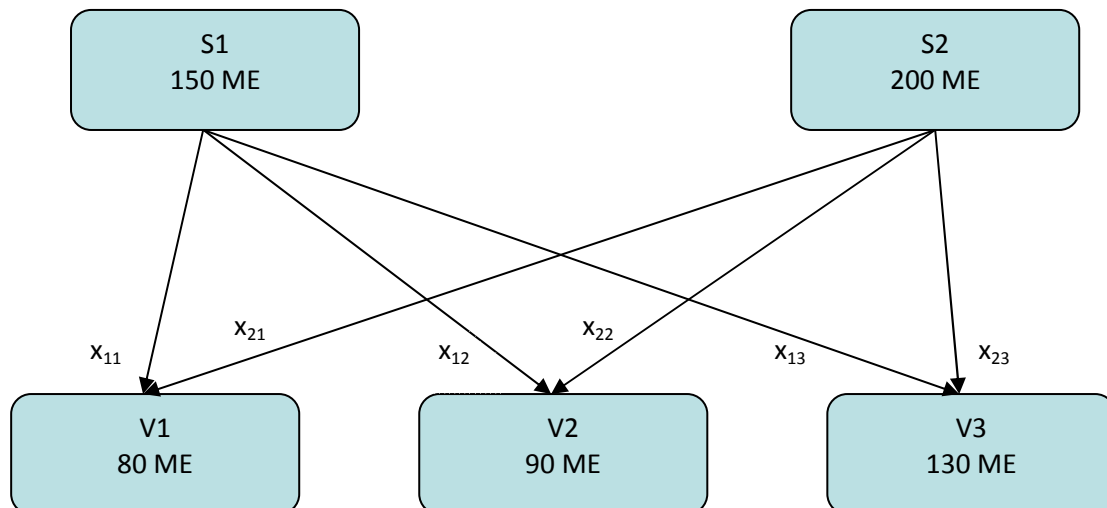
Das nächste Beispiel für die Behandlung als lineares Optimierungsproblem soll die Transportplanung sein. Diese Problemart zeichnet sich durch eine spezielle Art der Koeffizientenmatrix in den Nebenbedingungen aus, was auch zu speziellen Lösungsmethoden führt. Auf diese kann hier aber nicht eingegangen werden, so dass an dieser Stelle nur die aufwendigere Simplexmethode benutzt werden soll. Grafische Lösungen scheiden wegen der großen Anzahl an Variablen aus ($n > 2$). Bei Transportproblemen ist ein einheitliches Gut zu transportieren, wobei der Transportaufwand proportional zu den

Entfernungen und zu den zu transportierenden Mengen ist. Das Gut wird an mehreren Orten produziert oder gelagert, und es wird an verschiedenen (anderen) Orten benötigt. Das Gesamtaufkommen ist gleich dem Gesamtbedarf. Die Gesamtkosten sind dann zu minimieren.

In unserem Beispiel wird ein Produkt an zwei Standorten für drei Verbraucher hergestellt. Der Standort S_1 kann höchstens 150 ME liefern, der Standort S_2 200 ME. Die Verbraucher V_1 , V_2 , V_3 haben einen Bedarf von 80, 90 bzw. 130 ME. Bei der Auslieferung entstehen wegen der unterschiedlichen Entfernungen verschiedene Kosten:

	V_1 (in GE)	V_2 (in GE)	V_3 (in GE)
S_1	4	8	6
S_2	10	3	5

Welche Mengen sind von den einzelnen Standorten an die Verbraucher zu liefern, so dass die Gesamttransportkosten minimal werden?



Mathematisches Modell:

$$z = 4x_{11} + 8x_{12} + 6x_{13} + 10x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} \rightarrow \text{Min!} \quad (\text{Gesamttransportkosten})$$

$$x_{11} + x_{21} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} = 90$$

$$x_{13} + x_{23} = 130$$

(Bedarfsdeckung)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 150$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 200$$

(Lieferkapazitäten)

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, 3)$$

Die optimale Lösung dieses Transportproblems ist dann $\vec{x}_{opt} = (80 | 0 | 20 | 0 | 90 | 110)^T$, was zu minimalen Gesamtkosten von $z_{opt} = 1260$ GE führt.

4.3. Produktionsprogrammplanung

Wie soll ein Betrieb seine Produktion auslegen, damit das geplante Produktionsprogramm auch realisierbar ist und z.B. der Deckungsbeitrag maximiert wird?

In unserem Beispiel sollen drei Produkte auf vier Maschinen produziert werden. Die notwendigen Informationen für die Produktion sind:

	P1	P2	P3
M1	2	4	3
M2	3	6	9
M3	5	2	4
M4	7	1	7

Maschine 1 steht maximal 500 ZE, Maschine 2 maximal 600 ZE, Maschine 3 maximal 1000 ZE und Maschine 4 maximal 750 ZE zur Verfügung. Beim Verkauf der Produkte 1, 2, 3 werden die Deckungsbeiträge 20, 15 bzw. 32 GE/ME erzielt.

Wie viel soll von den einzelnen Produkten gefertigt werden, damit die Maschinenkapazitäten nicht überschritten werden und der Gesamtdeckungsbeitrag maximal wird?

Mathematisches Modell: x_j ... produzierte Menge von Produkt j

$$z = 20x_1 + 15x_2 + 32x_3 \rightarrow \text{Max!} \quad (\text{Zielfunktion})$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &\leq 600 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 1000 \\ 7x_1 + x_2 + 7x_3 &\leq 750 \end{aligned} \quad (\text{Nebenbedingungen})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativitätsbedingungen})$$

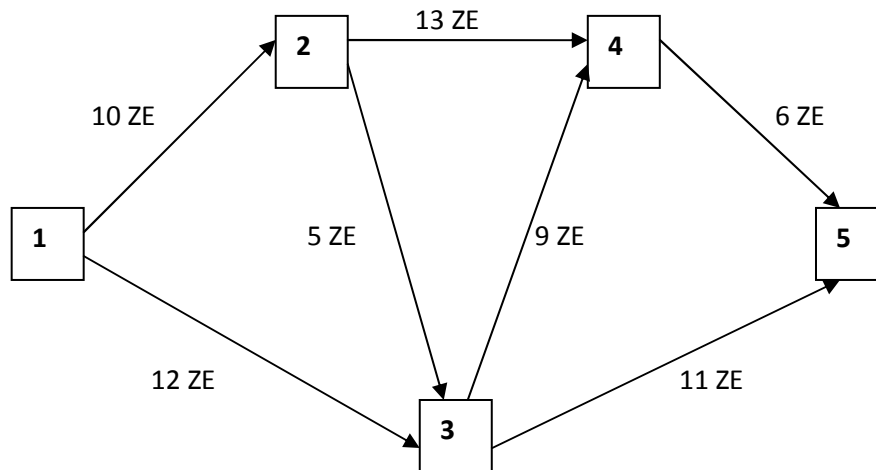
Die optimale Lösung $\bar{x}_{opt} = (100 | 50 | 0)^T$ führt auf einen maximalen Deckungsbeitrag von $z_{opt} = 2750$ GE.

In einem allgemeineren Beispiel für die Produktionsprogrammplanung sind auch noch Mindest- und Maximalfertigungsmengen gegeben, d.h. es gibt eine zusätzliche Bedingung $\bar{s} \leq \bar{x} \leq \bar{S}$.

4.4. Ablaufplanung

Ein betrachteter Prozess besteht aus verschiedenen Teilprozessen. Diese können dabei teils parallel ablaufen, aber auch nacheinander. Es gibt n Knoten (Knoten ... Beginn oder Ende eines Teilprozesses). Mit C bezeichnen wir die Matrix der Zeitdauern der Teilprozesse. Ein Ereignis i kann erst eintreten, wenn alle im Knoten i endenden Teilprozesse abgeschlossen sind. Der Knoten 1 steht für den Beginn, der Knoten n entspricht dem Ende.

Für $n = 5$ betrachten wir den folgenden Beispielprozess (ZE ... Zeiteinheit):



Zwei mögliche Fragestellungen sind hierbei von Interesse:

- Vorwärtsplanung: Gegeben ist ein Starttermin t_1 und gesucht wird der frühest mögliche Endtermin t_n ,
- Rückwärtsplanung: Gegeben ist ein Endtermin t_n und gesucht wird der spätest mögliche Starttermin t_1 .

(i,j) ... Teilprozess, der im Knoten i beginnt und im Knoten j endet

c_{ij} ... Zeitdauer des Teilprozesses (i,j) mit $C = (c_{ij})$, wobei $c_{ij} = 0$ für den Fall, dass kein Prozess (i,j) existiert

B_j ... Menge aller Teilprozesse (i,j)

$\vec{t} \in \mathbb{R}^n$... Vektor der Zeitpunkte t_i , an denen das Ereignis i eintritt

Es gelten die folgenden Restriktionen:

- $\forall j = 2, \dots, n : t_i + c_{ij} = t_j$ für alle $(i,j) \in B_j$,
- $\forall i = 1, \dots, n : t_i \geq 0$.

Die Zielfunktion ist dann für die

- Vorwärtsplanung: $t_n \rightarrow \text{Min!}$,
- Rückwärtsplanung: $t_1 \rightarrow \text{Max!}$.

Für unser konkretes Beispiel liefert die Rückwärtsplanung den spätesten Anfangstermin von 30 (ZE) und die Vorwärtsplanung den frühesten Endtermin nach 30 (ZE).

4.5. Ermittlung optimaler Zuschnittpläne

Optimaler Zuschnitt bedeutet die Lösung eines Minimierungsproblems, bei dem ein Ausgangsmaterial (Stahlbleche, Papierrollen, ...) in kleinere Bestandteile zerlegt werden muss bei kleinstmöglichem Verschnitt.

In unserem Beispiel soll das Ausgangsmaterial aus Papierrollen fester Länge und vorgegebener Breite von 2,10 m bestehen. Diese werden in Rollen von 62cm, 55cm bzw. 40cm Breite zerschnitten. Die Länge der schmalen Rollen soll gleich der der Ausgangsrolle sein. Es gibt dann sechs sinnvolle Varianten des Zuschnitts:

Rollenbreite	Zuschnittvariante						Bedarf (in Stück)
	1	2	3	4	5	6	
62cm	3	2	1	0	0	0	300
55cm	0	0	1	3	2	0	600
40cm	0	2	2	1	2	5	600
Verschnitt	24	6	13	5	20	10	

Es soll nun ermittelt werden, wie oft welche Zuschnittvariante angewendet werden muss, damit der Materialverlust minimiert und die Einhaltung des Bedarfs an schmalen Rollen gesichert wird.

Mathematisches Modell (minimaler Materialverlust):

$$z = 24x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 5x_4 + 20x_5 + 10x_6 \rightarrow \text{Min!} \quad (\text{Zielfunktion})$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 300 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 &\geq 600 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 5x_6 &\geq 600 \end{aligned} \quad (\text{Nebenbedingungen})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (\text{Nichtnegativitätsbedingungen})$$

Alternativ wäre auch eine andere Zielfunktion für einen minimalen Rollenverbrauch denkbar:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \text{Min!} .$$

Die optimale Kombination der Zuschnittvarianten (0 | 150 | 0 | 200 | 0 | 20) ergibt einen Zuschnitt von 370 Rollen und ist hier wegen der Zahl der Variablen ($n = 6$) nicht grafisch bestimmbar.

5. Lösung mittels Excel-Solvers

Wenn man Excel öffnet und bei früheren Versionen unter „Extras“ bzw. bei der 2010-Version unter „Daten - Analyse“ nicht den Eintrag '**Solver**' findet, muss dieses Add-In noch installiert werden (Im Register „Datei“ auf die Schaltfläche „Optionen“ und danach in der Kategorie „Add-Ins“ auf „Gehe zu“ klicken und im Dialogfeld „Add-Ins“ in der Liste „Verfügbare Add-Ins“ den Solver freischalten.). Der Solver stellt ein wichtiges Werkzeug bei der Linearen Optimierung dar und konnte ja bekanntlich auch zum Lösen linearer Gleichungssysteme $A \vec{x} = \vec{b}$ genutzt werden (siehe Skript „Matrizenrechnung/Lineare Gleichungssysteme“).

Wie gewohnt soll die Vorgehensweise der Lösung einer Linearen Optimierungsaufgabe mit Hilfe des Excel-Solvers an einem Beispiel demonstriert werden:

Zu maximieren ist die lineare Zielfunktion

$$f(x, y, z) = 0,08x + 0,09y + 0,01z$$

unter den Nichtnegativitätsbedingungen

$$x, y \geq 0$$

(wobei z beliebig ist) und den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{llll} (1) & x & + & y & + & z & \leq & 5,5 \\ (2) & x & + & y & & & \leq & 23 \\ (3) & x & & & + & z & \geq & 0,6 \\ (4) & & & y & & & \geq & 0,3 \end{array}$$

Nun werden Zielfunktion und die Nebenbedingungen in eine Excel-Tabelle (gelbe Felder) übertragen:

A14 fx									
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Lösung einer LOA mit dem Excel-Solver								
2									
3		x	y	z		aktueller Wert ZF			
4	Variablenwerte:								
5	Zielfunktion:	0,08	0,09	0,01					
6						aktueller Wert NB		gegebener Wert NB	
7	NB (1)	1	1	1			≤	5,5	
8	NB (2)	1	1	0			≤	23	
9	NB (3)	1	0	1			≥	0,6	
10	NB (4)	0	1	0			≥	0,3	
11									

Danach definiert man die Variablen in den Zellen B4, C4 und D4, den aktuellen Zielfunktionswert in Zelle F5 und die aktuellen Werte der Nebenbedingungen im Zellbereich F7:F10 (rosa Felder) durch die folgenden Befehle:

- F5 = B4*B5+C4*C5+D4*D5
- F7:F10 = MMULT(B7:D10 ; MTRANS(B4:D4))

Wegen der Verwendung von Matrixfunktionen ist bei der Bestätigung der letzten Formeleingabe die Tastenkombination < Strg > < ⬆ > < ⬅ > zu verwenden.

MMULT fx =B4*B5+C4*C5+D4*D5									
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Lösung einer LOA mit dem Excel-Solver								
2									
3		x	y	z		aktueller Wert ZF			
4	Variablenwerte:								
5	Zielfunktion:	0,08	0,09	0,01		=B4*B5+C4*C5+D4*D5			
6						aktueller Wert NB		gegebener Wert NB	
7	NB (1)	1	1	1		#WERT!	≤	5,5	
8	NB (2)	1	1	0		#WERT!	≤	23	
9	NB (3)	1	0	1		#WERT!	≥	0,6	
10	NB (4)	0	1	0		#WERT!	≥	0,3	
11									

Die Fehlermeldungen #WERT! entstehen lediglich dadurch, dass der bei der Rechnung benutzte Zellbereich der Variablen B4:D4 noch nicht mit Werten belegt ist.

Damit sind die Voraussetzungen in Excel geschaffen, um mittels Solvers das lineare Optimierungsproblem zu lösen. Der Cursor ist auf die Zielzelle F5, welche immer eine Berechnung enthalten muss, zu setzen. Dann wählt man im Register „Daten“ in der Gruppe „Analyse“ das Symbol „Solver“ aus.

The screenshot shows the Excel Solver interface with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Lösung einer LOA mit dem Excel-Solver														
2															
3		x	y	z		aktueller Wert ZF									
4	Variablenwerte:														
5	Zielfunktion:	0,08	0,09	0,01		0									
6						aktueller Wert NB		gegebener Wert NB							
7	NB (1)	1	1	1		#WERT!	IA	5,5							
8	NB (2)	1	1	0		#WERT!	IA	23							
9	NB (3)	1	0	1		#WERT!	IV	0,6							
10	NB (4)	0	1	0		#WERT!	IV	0,3							

Im sich öffnenden Fenster „Solver-Parameter“ sind folgende Eintragungen vorzunehmen:

- im Textfeld „Ziel festlegen:“ wird die Zielzelle F5 eingetragen,
- im Auswahlfeld „Bis:“ wird je nach Art des Optimierungsproblems die Option „Max.“ oder „Min.“ ausgewählt (hier: „Max.“),
- im Textfeld „Durch Ändern von Variablenzellen:“ wird der Variablenbereich B4:D4 eingetragen,
- bei in der Aufgabe vorliegenden Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen müsste der Haken gesetzt werden bei „Nicht eingeschränkte ... festlegen“, hier aber nicht, da hier z beliebig ist,
- im Auswahlfenster „Lösungsmethode auswählen:“ wird „Simplex-LP“ eingestellt,

The Solver-Parameter dialog box is shown with the following settings:

- Ziel festlegen:** \$F\$5
- Bis:** ☒ Max. ☐ Min. ☐ Wert: 0
- Durch Ändern von Variablenzellen:** \$B\$4:\$D\$4
- Unterliegt den Nebenbedingungen:** (Empty list)
- ☐ Nicht eingeschränkte Variablen als nicht-negativ festlegen
- Lösungsmethode auswählen:** Simplex-LP
- Lösungsmethode:** Wählen Sie das GRG-Nichtlinear-Modul für Solver-Probleme, die kontinuierlich nichtlinear sind. Wählen Sie das LP Simplex-Modul für lineare Solver-Probleme und das EA-Modul für Solver-Probleme, die nicht kontinuierlich sind.

Buttons: Hinzufügen, Ändern, Löschen, Alles zurücksetzen, Laden/Speichern, Hilfe, Lösen, Schließen.

- in das Textfeld „Unterliegt den Nebenbedingungen:“ werden die Nebenbedingungen wie folgt eingetragen:
 - anklicken der Schaltfläche „Hinzufügen“,
 - im Dialogfeld „Nebenbedingung hinzufügen“ werden nacheinander die beiden Nichtnegativitätsbedingungen

und die einzelnen Nebenbedingungen eingetragen mit der zutreffenden Relation ($\leq$, $=$, $\geq$), wobei die einzelnen Bedingungen durch Anklicken der Schaltfläche „Hinzufügen“ getrennt werden

und die letzte Bedingung durch „OK“ abgeschlossen wird.

Durch Anklicken der Schaltfläche „Lösen“ berechnet der Solver die optimale (hier: maximale) Lösung des linearen Optimierungsproblems.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	x	y	z
Variablenwerte:	18,1	4,9	-17,5
Zielfunktion:	0,08	0,09	0,01
NB (1)	1	1	1
NB (2)	1	1	0
NB (3)	1	0	1
NB (4)	0	1	0

The Solver-Results dialog box is open, showing the following options:

- ☒ Solver-Lösung akzeptieren
- ☐ Ursprüngliche Werte wiederherstellen
- ☐ Zurück zum Dialogfeld "Solver-Parameter"
- ☐ Gliederungsberichte

The dialog box also displays the message: "Solver hat eine Lösung gefunden. Alle Nebenbedingungen und Optionen wurden eingehalten."

Durch das Anklicken des Dialogfeldes „OK“ wird die gefundene Lösung im Zellbereich B4:D4 mit dem maximalen Zielfunktionswert 1,714 in der Zielzelle F5 akzeptiert. Wahlweise besteht zuvor noch die Möglichkeit verschiedene Berichte (Antwort, Sensitivität, Grenzwerte) auszuwählen, welche auf separaten Tabellenblättern ausgegeben werden. Diese dienen bei praktischen Aufgabenstellungen der weiterführenden Analyse der Modellbedingungen.

The screenshot shows the Excel spreadsheet with the optimal solution. The Solver-Results dialog box is open, showing the following options:

- ☒ Solver-Lösung akzeptieren
- ☐ Ursprüngliche Werte wiederherstellen
- ☐ Zurück zum Dialogfeld "Solver-Parameter"
- ☐ Gliederungsberichte

The dialog box also displays the message: "Solver hat eine Lösung gefunden. Alle Nebenbedingungen und Optionen wurden eingehalten."

The optimal solution is shown in the spreadsheet:

	x	y	z	aktueller Wert ZF	aktueller Wert NB	gegebener Wert NB
Variablenwerte:	18,1	4,9	-17,5			
Zielfunktion:	0,08	0,09	0,01	1,714		
NB (1)	1	1	1	5,5	1	5,5
NB (2)	1	1	0	23	1	23
NB (3)	1	0	1	0,6	1	0,6
NB (4)	0	1	0	4,9	1	0,3

Fordert man für die dritte Variable z ebenfalls die Nichtnegativität, so kann man diese neue Nichtnegativitätsbedingung zusätzlich in die Nebenbedingungen hineinnehmen oder alternativ bei Verzicht auf Nichtnegativitätsnebenbedingungen den Haken setzen bei „Nicht eingeschränkte ... festlegen“. Beide Wege führen dann auf die gewohnte Weise zum neuen Ergebnis mit der gefundenen Lösung im Zellbereich B4:D4 und dem maximalen Zielfunktionswert 0,489 in der Zielzelle F5.

F5		f _x		=B4*B5+C4*C5+D4*D5					
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Lösung einer LOA mit dem								
2									
3		x	y	z		aktueller Wert ZF			
4	Variablenwerte:	0,6	4,9	0					
5	Zielfunktion:	0,08	0,09	0,01		0,489			
6						aktueller Wert NB		gegebener Wert NB	
7	NB (1)	1	1	1		5,5	≤	5,5	
8	NB (2)	1	1	0		5,5	≤	23	
9	NB (3)	1	0	1		0,6	≤	0,6	
10	NB (4)	0	1	0		4,9	≤	0,3	
11									