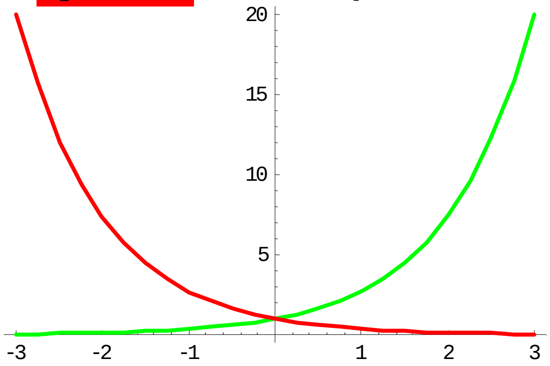
Arbeitsblatt - „Grenzwert und Stetigkeit“

I. Verhalten (Grenzwert) einer reellen Funktion f(x) im Unendlichen

<u>Definition:</u> Eine Zahl G heißt Grenzwert einer reellen Funktion f für x gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$, wenn für jede Folge (x_n) aus dem Definitionsbereich D(f) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen G strebt (konvergiert): $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = G$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = G$.

<u>Beipiel:</u> $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $D(f) = \{x : -\infty < x < +\infty\}$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

<u>Aufgaben:</u> Berechnen Sie für folgende Funktionen die Grenzwerte (Verhalten) im Unendlichen!
(Hinweis: Vereinfachen Sie die Funktion so weit wie möglich vor der Grenzwertbildung.)

(a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x-2}{x-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2}$ (d) $f(x) = \dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{(x^2-x+2)\cdot(x+1)}$

(e) $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{(2x-1)\cdot(2x+1)}$ (f) $f(x) = \dfrac{2x^3-1}{x^2-x+2}$

(g) $f(x) = \dfrac{2x^3+3x-1}{3x^3+2x^2-7x-14}$ (h) $f(x) = \dfrac{7x^3+3x^2-12}{-3x^4+2x^2+17x-4}$

II. Grenzwert einer reellen Funktion f(x) an einer Stelle x_0
(A) Einseitige Grenzwerte

<u>Definition:</u> Die Zahlen G_L bzw. G_R heißen linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert einer reellen Funktion f für x gegen x_0, wenn für jede Folge (x_n) (z.B. $x_n=x_0-1/n$ bzw. $x_n=x_0+1/n$) aus dem Definitionsbereich D(f) mit den Eigenschaften

(a) $x_n < x_0$ bzw. $x_n > x_0$ für alle n,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

die Folge der Funktionswerte ($f(x_n)$) gegen G_L bzw. G_R strebt (konvergiert): $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = G_L$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = G_R$.

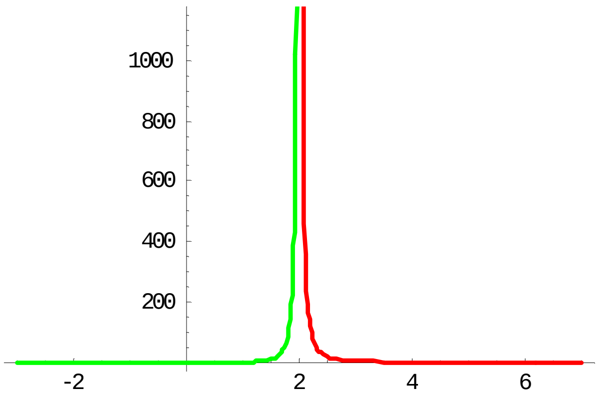
Beispiel 1: $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2}$, $x_0 = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$

linksseitiger Grenzwert: $x_n = 2 - h_n$

$$G_L = \lim_{x\to 2-0} \frac{2x}{(x-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2-h_n)}{((2-h_n)-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-2h_n}{(-h_n)^2} = \frac{4-2\cdot 0}{0^2} = \frac{4}{0} = +\infty$$

rechtsseitiger Grenzwert: $x_n = 2 + h_n$

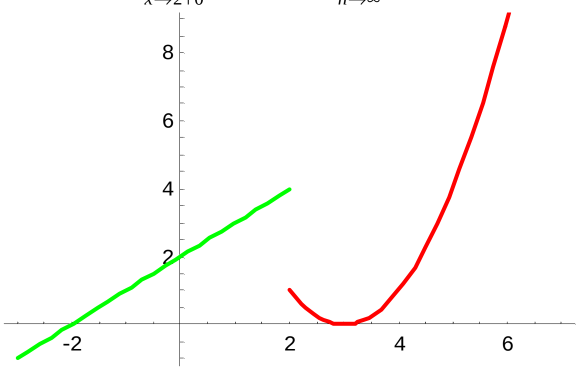
$$G_R = \lim_{x\to 2+0} \frac{2x}{(x-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2+h_n)}{((2+h_n)-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+2h_n}{{h_n}^2} = \frac{4+2\cdot 0}{0^2} = \frac{4}{0} = +\infty$$



Beispiel 2: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für} \quad x < 2 \\ (x-3)^2 & \text{für} \quad x \ge 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

linksseitiger Grenzwert: $G_L = \lim\limits_{x\to 2-0} x+2 = \lim\limits_{n\to\infty}(2-h_n)+2 = \lim\limits_{n\to\infty} 4-h_n = 4$

rechtsseitiger Grenzwert: $G_R = \lim\limits_{x\to 2+0} (x-3)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}((2+h_n)-3)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} {h_n}^2 - 2h_n + 1 = 1$



Aufgaben: Bestimmen Sie die linksseitigen und die rechtsseitigen Grenzwerte folgender Funktionen an der Stelle x_0!

(a) $f(x) = \dfrac{7x-3}{x^2-2x+1}$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{7x-3}{2x^2+8x}$, $x_0 = -4$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{für} \quad 0 < x \le 3 \\ x-1 & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$

(d) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2+5 & \text{für } -\infty < x \le 2 \\ 2x+1 & \text{für } x > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{3x^2} & \text{für } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{4x}{(x+1)^2} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

(f) $f(x) = \dfrac{7x+13}{2x^2+5x}, \quad x_0 = -2$

(g) $f(x) = \dfrac{-2x+6}{x^2-3x-3}, \quad x_0 = 4$

(B) Grenzwerte

Definition: Sind bei einer reellen Funktion f der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an einer Stelle x_0 gleich, dann besitzt f(x) in x_0 den Grenzwert $G = G_L = G_R$: $G = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

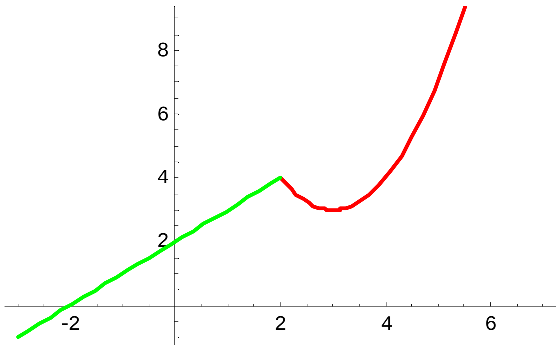
Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } x < 2 \\ 3+(x-3)^2 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$

linksseitiger Grenzwert: $G_L = \lim\limits_{x \to 2-0} x+2 = \lim\limits_{n \to \infty}(2-h_n)^2 = \lim\limits_{n \to \infty} 4 - 4h_n + h_n{}^2 = 4$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$G_R = \lim_{x \to 2+0} 3+(x-3)^2 = 3 + \lim_{n \to \infty}((2+h_n)-3)^2 = 3 + \lim_{n \to \infty} h_n{}^2 - 2h_n + 1 = 4$$

$\longrightarrow$ **Grenzwert:** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$



Aufgaben: Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen an der Stelle x_0!

(a) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-1}, \quad x_0 = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-1}, \quad x_0 = -1$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2(x-1)}, \quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}, \quad x_0 = 2$

(e) $f(x) = \begin{cases} 7x-4 & \text{für } x < 1 \\ (x+1)^2-1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

(f) $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 & \text{für } x \le -2 \\ x^2+2x-2 & \text{für } x > -2 \end{cases}, \quad x_0 = -2$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+5}{\cos x}, \quad x_0 = 0$

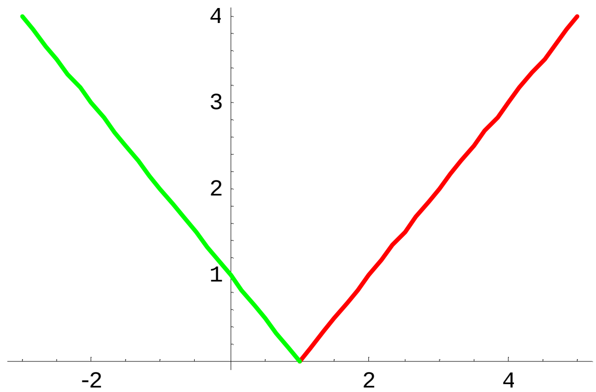
(h) $f(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{1+x}, \quad x_0 = -1$

III. Stetigkeit einer reellen Funktion f(x) an einer Stelle x_0

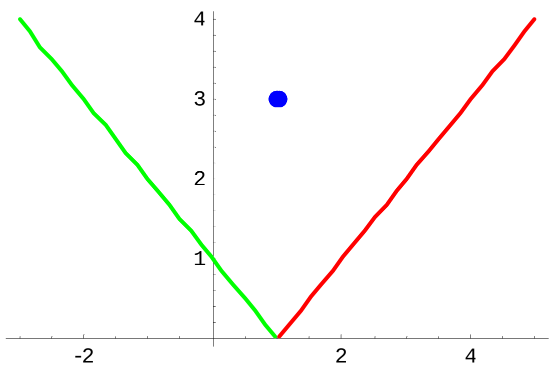
Definition: Eine in x_0 und einer Umgebung von x_0 definierte reelle Funktion f heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle existiert und mit dem dortigen Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel: $f_1(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für} \quad x<1 \\ x-1 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für} \quad x<1 \\ 3 & \text{für} \quad x=1 \\ x-1 & \text{für} \quad x>1 \end{cases}$

$\longrightarrow$ $f_1(x)$ ist stetig in $x_0 = 1$, denn $f_1(1) = 1-1 = 0$ und $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = 0$ stimmen überein.



$\longrightarrow$ $f_2(x)$ ist **nicht** stetig in $x_0 = 1$, denn $f_2(1) = 3$ und $\lim\limits_{x \to 1} f_2(x) = 0$ stimmen nicht überein.



Aufgaben: Überprüfen Sie, ob die gegebenen Funktionen stetig sind! (Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die für die Stetigkeit kritischen (d.h. mögliche Unstetigkeiten) Punkte x_0 der Funktionen!)

(a) $f(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{für} \quad x<-\pi \\ \sin x & \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ -x+\pi & \text{für} \quad x>\pi \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{für} \quad x<-1 \\ (x-1)^3 & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für} \quad x<-1 \\ x-1 & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{für} \quad x<-1 \\ 1 & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{für} \quad x>1 \end{cases}$

(e) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+4x}{x+2}+4 & : \quad x<-2\\ (x+2)^2 & : \quad -2\le x\le 1\\ \dfrac{4(x^3-x)}{x-1}+1 & : \quad x>1\end{cases}$$

(f) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2} & \text{für} \quad x<0\\ x+12 & \text{für} \quad x\ge 0\end{cases}$$

Lösungen

I.

(a)	2	(b)	2	(c)	0	(d)	2
(e)	1	(f)	$\pm\infty$	(g)	2/3	(h)	0

II.A.

(a)	von links: $+\infty$	von rechts: $+\infty$	(Polstelle gerader Ordnung)
(b)	von links: $-\infty$	von rechts: $+\infty$	(Polstelle ungerader Ordnung)
(c)	von links: 1	von rechts: 2	(Sprungstelle)
(d)	von links: 5	von rechts: 5	(stetig in x=2)
(e)	von links: $+\infty$	von rechts: 0	(Sprungstelle)
(f)	von links: ½	von rechts: ½	(stetig in x=-2)
(g)	von links: -2	von rechts: -2	(stetig in x=4)

II.B.

(a)	$+\infty$	(b)	-1	(c)	$+\infty$	(d)	4/9
(e)	3	(f)	von links: -4 , von rechts: -2 (kein Grenzwert, Sprungstelle)				
(g)	5	(h)	-6				

III.

(a) stetig in $x_0 = -\pi$ und in $x_0 = +\pi$

(b) unstetig in $x_0 = -1$ (Sprungstelle)

(c) unstetig in $x_0 = -1$ (Sprungstelle)

(d) stetig in $x_0 = -1$ und unstetig in $x_0 = 1$ (Sprungstelle)

(e) stetig in $x_0 = 1$ und unstetig in $x_0 = -2$ (Sprungstelle)

(f) unstetig in $x_0 = 0$ (Sprungstelle)